عند برحون 1MN

Département de Maths	Université d'El-Oued	Module: Calcul Différentiel
1re année master	Faculté des Sciences Exactes	Année universitaire: 2021-2022

Corrigé type de l'examen de la session ordinaire

Exercice 1. Montrons que f est différentiable en $(0,0)$:

- On calcule les dérivées partielles. Soit $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x^4 y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2}$$ 1

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2+y^2)^2}.$$ 1

En $(0,0)$: • Existence:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0$$ 1

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0.$$ 1

• Continuité: On a,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leq \frac{x^4|y|}{(x^2)^2} + 4\frac{x^2|y|^3}{x^2y^2} + \frac{|y|^5}{(y^2)^2}$$

$$\leq |y| + 4|y| + |y| = 6|y|$$ 1

(utilisons
• $|xy| \leq x^2+y^2$
• $\frac{1}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{x^2}$
• $\frac{1}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{y^2}$)

et $$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leq \frac{|x|^5}{(x^2)^2} + 4\frac{|x|^3y^2}{x^2y^2} + \frac{|x|y^4}{(y^2)^2}$$

$$\leq |x| + 4|x| + |x| = 6|x|$$ 1

donc, on obtient $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ 0,5

et $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ 0,5

d'où la continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $(0,0)$.

Comme $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont existes, continues en $(0,0)$ alors f est différentiable en $(0,0)$ et l'on a

$df(0,0)(h,k) = h\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ pour tout $(h,k)\in\mathbb{R}^2$.

(Ou de toute autre manière acceptable).

Exercice 2. (1) Montrons que φ est de classe C^1:

• Différentiabilité de φ:

Fixons $f \in E$. On a pour $h \in E$,

$\varphi(f+h) - \varphi(f) = ((f+h)')^2 + 2022(f+h) - (f')^2 - 2022 f$ 1

$= (f')^2 + (h')^2 + 2f'h' + 2022 f + 2022 h - (f')^2 - 2022 f$

$= 2f'h' + 2022 h + (h')^2.$ 1

Choisissons, $u(h) = 2f'h' + 2022 h$ et $o(h) = (h')^2.$

. u est linéaire : $u(\alpha h_1 + \beta h_2) = 2f'(\alpha h_1' + \beta h_2') + 2022(\alpha h_1 + \beta h_2)$ 1

$= \alpha u(h_1) + \beta u(h_2)$

. u est continue : $\| u(h) \|_\infty = \| 2f'h' + 2022 h \|_\infty$

$\leq 2 \|f'\|_\infty \|h'\|_\infty + 2022 \|h\|_\infty$ 1

$\leq 2 \|f\|_1 \|h\|_1 + 2022 \|h\|_1$

$\leq (2\|f\|_1 + 2022) \|h\|_1 .$

• $\|o(h)\|_\infty = \|(h')^2\|_\infty \leq \|h'\|_\infty^2 \leq \|h\|_1^2$ 1

donc $\frac{\|o(h)\|_\infty}{\|h\|_1} \leq \|h\|_1$ et $\lim_{\|h\|_1 \to 0} \frac{\|o(h)\|_\infty}{\|h\|_1} = 0.$

φ est différentiable en f pour tout $f \in E$, donc différentiable sur E 0,5

et sa différentielle, $d\varphi(f)(h) = 2f'h' + 2022 h.$ 0,5

② $d\varphi : E \longrightarrow \mathcal{L}(E,F)$ est une application continue :
$f \longmapsto d\varphi(f)$

Soit $f, g \in E$, On a

$\|d\varphi(f) - d\varphi(g)\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{\substack{h \in E \\ \|h\|_1 \leq 1}} \|d\varphi(f)(h) - d\varphi(g)(h)\|_F$ 1

$= \sup_{\substack{h \in E \\ \|h\|_1 \leq 1}} \| 2f'h' + 2022 h - 2g'h' - 2022 h \|_\infty$

$= 2 \sup_{\substack{h \in E \\ \|h\|_1 \leq 1}} \| (f-g)' h' \|_\infty$

$\leq 2 \sup_{\substack{h \in E \\ \|h\|_1 \leq 1}} (\|f-g\|_1 \|h\|_1)$ 1

$\leq 2 \|f-g\|_1 .$

D'où, $d\varphi$ est 2-lipschitzienne, et donc elle est continue. 0,5

On conclut que $\varphi \in C^1(E,F)$

2) Nous avons, E et F deux espaces de Banach.

$$\underline{\varphi(0_E) = 0_F}.$$

Aussi on a,

- $\underline{\varphi \in C^1(E,F)}$ (d'après la question 1).
- $d\varphi(0_E) : E \longrightarrow F$
  $h \longmapsto d\varphi(0_E)(h) = 2022h.$

$d\varphi(0_E)$ est <u>linéaire</u>, <u>bijection</u> et <u>continue</u> $(\|d\varphi(0_E)(h)\|_\infty \leq 2022\|h\|_1)$ et son inverse :

$$(d\varphi(0_E))^{-1} : F \longrightarrow E, \quad k \longmapsto \frac{1}{2022}k$$ est linéaire, <u>continue</u>.

Alors $\underline{d\varphi(0_E) \in Isom(E,F)}$.

Donc le théorème d'inversion locale est applicable qu'il existe des voisinages ouverts V_{0_E} de 0_E dans E et V_{0_F} de 0_F dans F tel que $\varphi : V_{0_E} \longrightarrow V_{0_F}$ est C^1-difféomorphisme.